DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

W. BLASCHKE · R. GRAMMEL · E. HOPF · F. K. SCHMIDT
B. L. VAN DER WAERDEN

BAND LII

FORMELN UND SÄTZE FÜR DIE SPEZIELLEN FUNKTIONEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

WILHELM MAGNUS UND FRITZ OBERHETTINGER

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1943

FORMELN UND SÄTZE FÜR DIE SPEZIELLEN FUNKTIONEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

DR. WILHELM MAGNUS
APL. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

UND

DR. FRITZ OBERHETTINGER
BERLIN

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1943

im übrigen die ausführliche Monographie von M. I. O. STRUTT, auf die hier verwiesen werden kann.

Für freundlichen Rat und wertvolle Hilfe sind wir Frau Dr. FLÜGGE-LOTZ und den Herren Dr.-Ing. FLÜGGE, Professor Dr. H. GEPPERT, Professor Dr. R. GRAMMEL, Professor Dr. H. SCHMIDT und insbesondere Herrn Professor Dr. W. Süss zu größtem Dank verpflichtet.

Dem Springer-Verlag danken wir für die großzügige Unterstützung unserer Arbeit.

Berlin, im Januar 1943.

Die Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erstes Kapitel: Die Gammafunktion 1

Zweites Kapitel: Die hypergeometrische Funktion 7

§ 1. Die hypergeometrische Reihe 7

§ 2. Die RIEMANNsche Differentialgleichung 12

Drittes Kapitel: Die Zylinderfunktionen 16

§ 1. Definitionen, Differentialgleichung, Rekursionsformeln, Reihenentwicklungen, Mehrdeutigkeit, unbestimmte Integrale 16

§ 2. Additionstheoreme. Multiplikationstheorem 20

§ 3. Asymptotische Entwicklungen 22

§ 4. Nullstellen. Produktzerlegung für $J_\nu(z)$. Eine Partialbruchzerlegung 25

§ 5. Integraldarstellungen 26

§ 6. Integralbeziehungen zwischen Zylinderfunktionen 28

§ 7. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen, insbesondere diskontinuierliche Faktoren und Integraldarstellungen elementarer Funktionen 32

§ 8. Den BESSELschen Funktionen zugeordnete Polynome 38

§ 9. Die Funktionen von STRUVE, ANGER und WEBER 40

§ 10. Die Funktionen von LOMMEL 42

§ 11. Beispiele KAPTEYNscher Reihen 43

§ 12. SCHLÖMILCH-Reihen 43

Anhang zum dritten Kapitel: § 13. MATHIEUsche Funktionen 44

Viertes Kapitel: Kugelfunktionen 49

§ 1. Differentialgleichung, Definitionen und Bezeichnungen 49

§ 2. Die LEGENDREschen Polynome 50

§ 3. Die zugeordneten LEGENDREschen Kugelfunktionen erster Art . . . 53

§ 4. Die Lösungen der LEGENDREschen Differentialgleichung 55

§ 5. Allgemeine Kugelfunktionen 59

a) Darstellung durch hypergeometrische Funktionen. S. 59. — b) Rekursionsformeln und Beziehungen zwischen verschiedenen Kugelfunktionen. S. 61. — c) Formeln für spezielle Werte von x, μ, ν. S. 63. — d) Analytische Fortsetzung und Verhalten für $|z| \gg 1$. S. 64. — e) Integraldarstellungen. S. 66. — f) Einige Integrale mit Kugelfunktionen. S. 69. — g) Das Additionstheorem. S. 69. — h) Sätze über Nullstellen. S. 70. — i) Asymptotisches Verhalten für große Werte von $|\nu|$. S. 71. — k) Ergänzungen. S. 73.

§ 6. Kegelfunktionen 74

§ 7. Ring- oder Torusfunktionen 75

Anhang zum vierten Kapitel: Die Funktionen von GEGENBAUER . . . 76

Seite

Fünftes Kapitel: Orthogonale Polynome 78

§ 1. Tschebyscheffsche Polynome 78
§ 2. Hermitesche Polynome 80
§ 3. Jacobische Polynome 83
§ 4. Laguerresche Polynome 84

Sechstes Kapitel: Die konfluente hypergeometrische Funktion und ihre Spezialfälle 86

§ 1. Die Funktionen von Kummer 86
§ 2. Die Funktionen von Whittaker 88
§ 3. Die Funktionen des parabolischen Zylinders 91
§ 4. Übersicht über die Spezialfälle der konfluenten hypergeometrischen Funktion 94

a) Die Laguerreschen Funktionen. S. 94. — b) Die Funktionen des parabolischen Zylinders. S. 95. — c) Die Zylinderfunktionen. S. 95. — d) Die unvollständige Gammafunktion. S. 95. — e) Das Fehlerintegral und die Fresnelschen Integrale. S. 96. — f) Integrallogarithmus, Exponentialintegral, Integralsinus, Integralcosinus. S. 97.

Siebentes Kapitel: Thetafunktionen, elliptische Funktionen und Integrale 98

§ 1. Thetafunktionen 98
§ 2. Die Weierstrasssche $\wp$-Funktion 100
§ 3. Die elliptischen Funktionen von Jacobi 102
§ 4. Elliptische Integrale 105

Achtes Kapitel: Integraltransformationen und Integralumkehrungen 114

§ 1. Die Fourier-Transformation 115
§ 2. Die Laplace-Transformation 120
§ 3. Die Hankel-Transformation 136
§ 4. Beispiele zur Mellin-Transformation 137
§ 5. Über die Gauss-Transformation 138
§ 6. Verschiedene Beispiele von Integralgleichungen erster Art 189

1. Die Reziprozitätsformel von Hilbert für den Cotangens-Kern 139
2. Modifikationen der Formel von Hilbert 140
3. Die Abelsche Integralgleichung 141
4. Integralumkehrungen vom Typ der Mellin-Transformation 141
5. Weitere Beispiele 142

Neuntes Kapitel: Koordinaten-Transformationen 144

§ 1. Differentialoperationen in orthogonalen Koordinaten 144
§ 2. Beispiele zur Trennung der Veränderlichen 154
Anhang zum neunten Kapitel: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung 159

Zusammenstellung der benutzten Abkürzungen 162

Verzeichnis der Funktionssymbole 164

Literaturverzeichnis 167

Sach- und Namenverzeichnis 171

Erstes Kapitel.

Die Gammafunktion.

Die Funktion[1] $\Gamma(z)$ ist eine analytische meromorphe Funktion von z mit einfachen Polen an den Stellen $z = -l$ für $l = 0, 1, 2, \ldots$ und den diesbezüglichen Residuen $\frac{(-1)^l}{l!}$. Sie ist als solche durch die folgenden drei Eigenschaften und die Forderung $\Gamma(1) = 1$ eindeutig bestimmt:

Die *Funktionalgleichung* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

$\Gamma(z)$ ist reell und positiv, wenn z reell und positiv ist.

Für reelle positive Werte von z ist $(\Gamma'(z))^2 < \Gamma(z)\Gamma''(z)$.

Weitere Funktionalgleichungen:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}$$

(*Ergänzungssätze*),

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}\, n^{1/2-nz}\,\Gamma(nz)$$

(*Multiplikationstheorem*; $n = 2, 3, 4, \ldots$).

Insbesondere für $n = 2$ und $n = 3$

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2^{-1/2}\, 2^{2z}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(3z) = \frac{1}{2\pi}\cdot 3^{-1/2}\, 3^{3z}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{3}\right).$$

Spezielle Werte:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \prod_{n=1}^{8}\Gamma\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{640}{3^6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3;$$

$$\frac{(\Gamma(\frac{1}{4})^4)}{16\pi^2} = \frac{3^2}{3^2-1}\,\frac{5^2-1}{5^2}\,\frac{7^2}{7^2-1}\,\frac{9^2-1}{9^2}\cdots; \quad \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 2\ln 2.$$

Verschiedene analytische Ausdrücke für $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1} dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0),$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \left[e^{-t} - \sum_{l=0}^{n}\frac{(-t)^l}{l!}\right] t^{z-1}\, dt,$$

[1] Vielfach wird $\Gamma(z+1)$ mit $\Pi(z)$ oder mit $z!$ bezeichnet und „Fakultät von z" genannt.

gleichzeitig in Formel (S_3) bzw. (S_1) die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ sich auf eine elementare Funktion reduziert. Spezialfälle der Formeln (S_1), (S_2), (S_3) sind die folgenden:

$$\int_0^\infty J_{\nu+n}(at)\, J_{\nu-n-1}(bt)\, dt = \begin{cases} \dfrac{b^{\nu-n-1}\,\Gamma(\nu)}{a^{\nu-n}\, n!\, \Gamma(\nu-n)}\, {}_2F_1\left(\nu,\ -n;\ \nu-n;\ \dfrac{b^2}{a^2}\right) \\ (-1)^n/2\,a \\ 0 \end{cases}$$

(oberste Formel für $0 < b < a$, mittlere für $0 < b = a$, unterste für $0 < a < b$; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\operatorname{Re} \nu > 0$),

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, J_\nu(at)\, \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\, \frac{\sin\left(\dfrac{\nu-\mu}{2}\pi\right)}{\nu^2-\mu^2}$$

$(\operatorname{Re}(\nu+\mu) > 0;\quad a > 0)$,

$$\int_0^\infty t^{-\mu} J_\mu(t)\, t^{-\nu} J_\nu(t)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu)\, 2^{-\mu-\nu}}{\Gamma(\mu+\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$$

$(\operatorname{Re}(\mu+\nu) > 0)$,

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\, J_{\nu+1}(bt)\, dt = \begin{cases} a^\nu\, b^{-\nu-1} & \text{für } 0 < a < b \\ \dfrac{1}{2\,a} & \text{für } 0 < a = b \\ 0 & \text{für } 0 < b < a \end{cases}$$

(a, b reell und positiv, $\operatorname{Re} \nu > -1$),

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, J_\mu(bt)\, \frac{dt}{t} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{b}{a}\right)^\mu & \text{für } a > b \\ \dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{a}{b}\right)^\mu & \text{für } a < b \end{cases}$$

(a, b reell und $\geqq 0$, $\operatorname{Re} \mu > 0$),

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, \sin bt\, \frac{dt}{t} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\sin\left(\mu \arcsin \dfrac{b}{a}\right) & \text{für } a > b \\ \dfrac{a^\mu \sin \dfrac{\mu\pi}{2}}{\mu\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right)^\mu} & \text{für } a < b \end{cases}$$

(a, b reell und $\geqq 0$, $\operatorname{Re} \mu > -1$),

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, \cos bt\, \frac{dt}{t} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\cos\left(\mu \arcsin \dfrac{b}{a}\right) & \text{für } a > b \\ \dfrac{a^\mu \cos \dfrac{\mu\pi}{2}}{\mu\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right)^\mu} & \text{für } a < b \end{cases}$$

(a, b reell und $\geqq 0$, $\operatorname{Re} \mu > 0$),

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, \sin bt\, dt = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\mu \arcsin \dfrac{b}{a}\right)}{\sqrt{a^2-b^2}} & \text{für } a > b \\ \dfrac{a^\mu \cos \dfrac{\mu\pi}{2}}{\sqrt{b^2-a^2}\,\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right)^\mu} & \text{für } a < b \end{cases}$$

(a, b reell und $\geqq 0$, $\operatorname{Re} \mu > -2$),

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, \cos bt\, dt = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\mu \arcsin \dfrac{b}{a}\right)}{\sqrt{a^2-b^2}} & \text{für } a > b \\ \dfrac{-a^\mu \sin \dfrac{\mu\pi}{2}}{\sqrt{b^2-a^2}\,\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right)^\mu} & \text{für } a < b \end{cases}$$

(a, b reell und $\geqq 0$; $\operatorname{Re} \mu > -1$),

$$\int_0^\infty J_{\mu+1}(at)\, J_\nu(bt)\, t^{\nu-\mu}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } a < b \\ \dfrac{(a^2-b^2)^{\mu-\nu}\, b^\nu}{2^{\mu-\nu}\, a^{\mu+1}\, \Gamma(\mu-\nu+1)} & \text{für } a \geqq b \end{cases}$$

(a, b reell und positiv; $\operatorname{Re} \nu > -1$; $\operatorname{Re}(\mu-\nu+1) > 0$).

Weitere Formeln:

$$\int_0^\infty K_\mu(at)\, J_\nu(bt)\, t^{\nu+\mu+1}\, dt = \frac{(2a)^\mu (2b)^\nu\, \Gamma(\mu+\nu+1)}{(a^2+b^2)^{\mu+\nu+1}}$$

$(\operatorname{Re}(\nu+1) > |\operatorname{Re}\mu|;\quad \operatorname{Re} a > |\operatorname{Im} b|;\quad \operatorname{Re} a > 0)$,

$$b^{-\mu-\nu}\int_0^\infty e^{-2at}\, J_\mu(bt)\, J_\nu(bt)\, t^{\mu+\nu}\, dt = \frac{\Gamma(\mu+\nu+\frac{1}{2})}{\pi^{3/2}}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{\mu+\nu}\varphi \cos(\mu-\nu)\varphi}{(a^2+b^2\cos^2\varphi)^{\mu+\nu+1/2}}\, d\varphi$$

$(\operatorname{Re} a > |\operatorname{Im} b|;\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -\frac{1}{2})$,

$$\int_0^\infty \prod_{n=1}^m J_\nu(a_n t)\, \frac{dt}{t^{\nu m-2\nu-1}} = 0$$

($a_1, \ldots, a_n$ reell; $a_1 > a_2 > a_3 \cdots > a_m > 0$; $a_1 > a_2 + a_3 + \cdots + a_m$; $\operatorname{Re} \nu > -1$).

Formel von Sonine *und* Dougall:

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, J_\nu(bt)\, J_\nu(ct)\, t^{1-\mu}\, dt = \frac{(bc)^\nu\, 2^{-\mu+1}}{a^\mu\, \Gamma(\mu-\nu)\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^A (a^2-b^2-c^2+2\,bc\cos\varphi)^{\mu-\nu-1} \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi,$$

wobei a, b, c reell und positiv sind, und

$$A = 0; \quad \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \pi$$

ist, je nachdem $a^2 < (b-c)^2$; $(b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2$; $(b+c)^2 < a^2$ ist. Ferner ist $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$ zu fordern. Für $\mu = \nu$ liefert diese Formel

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\, J_\nu(bt)\, J_\nu(ct) \frac{dt}{t^{\nu-1}} = \frac{2^{\nu-1} \Delta^{2\nu-1}}{(abc)^\nu\, \Gamma(\nu + \frac{1}{2})\, \Gamma(\frac{1}{2})},$$

wobei $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$ ist und Δ der Inhalt des Dreiecks mit den Seiten a, b, c ist; wenn diese Größen sich nicht als Seiten eines Dreiecks auffassen lassen, ist Δ gleich Null zu setzen.

Formel von SONINE *und* GEGENBAUER:

$$\int_0^\infty J_\mu(bt)\, J_\nu\left(a\sqrt{t^2 + x^2}\right) (t^2 + x^2)^{-\nu/2}\, t^{\mu+1}\, dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } a < b \\ \dfrac{b^\mu}{a^\nu} \left\{ \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{x} \right\}^{\nu-\mu-1} J_{\nu-\mu-1}\left(x\sqrt{a^2 - b^2}\right) & \text{für } a > b \end{cases}$$

$$(\operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > -1; \quad a, b, x \text{ reell und } \geqq 0).$$

Weitere Formeln in Kapitel VIII, §§ 1, 2, 3.

§ 8. Den BESSELschen Funktionen zugeordnete Polynome.

a) **Die NEUMANNschen Polynome** $O_n(t)$ sind Polynome in t^{-1}, welche durch die für $|t| > |z|$ gültige Reihenentwicklung

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n\, O_n(t)\, J_n(z)$$

definiert werden können. Es ist

$$O_0(t) = \frac{1}{t}; \quad O_n(t) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n(n-m-1)!}{m!\, (\frac{1}{2}t)^{n-2m+1}} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Es gilt für $n \geqq 1$:

$$(n-1)\, O_{n+1}(t) + (n+1)\, O_{n-1}(t) - \frac{2(n^2-1)}{t} O_n(t) = \frac{2n \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{t},$$

$$O_{n-1}(t) - O_{n+1}(t) = 2\, O_n'(t),$$

sowie

$$-O_1(t) = O_0'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Für jede den Nullpunkt der z-Ebene umschließende doppelpunktfreie geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ gilt

$$\int_{\mathfrak{C}} O_m(z)\, O_n(z)\, dz = 0 \qquad \text{für } m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{\mathfrak{C}} J_m(z)\, O_n(z)\, dz = 0 \quad \text{für } m^2 \neq n^2;\ m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{\mathfrak{C}} J_n(z)\, O_n(z)\, dz = \frac{2\pi i}{\varepsilon_n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ebenfalls als NEUMANNsche Polynome werden auch die Funktionen $\Omega_n(t)$ (für $n = 0, 1, 2, \ldots$) bezeichnet, welche Polynome in t^{-1} sind und durch die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{t^2 - z^2} = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n\, \Omega_n(t)\, J_n^2(z)$$

definiert werden.

Als Verallgemeinerung der NEUMANNschen Polynome sind die Funktionen $A_{n,\nu}(t)$ anzusehen, die durch

$$\frac{z^\nu}{t - z} = \sum_{n=0}^\infty A_{n,\nu}(t)\, J_{\nu+n}(z)$$

definiert sind und zuweilen als „*Polynome von Gegenbauer*" bezeichnet werden; sie sind ebenfalls Polynome in t^{-1}.

Statt der Funktionen $O_n(t)$ kann man sich der **Polynome von SCHLÄFLI** bedienen, welche durch

$$S_0(t) = 0, \quad S_{-n}(t) = (-1)^{n+1} S_n(t) \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots,$$

$$S_n(t) = \frac{2}{n} \left\{ t\, O_n(t) - \cos^2 \frac{1}{2} n\pi \right\} \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

definiert sind; sie genügen der Differentialgleichung

$$\left\{ t^2 \frac{d^2}{dt^2} + t \frac{d}{dt} + (t^2 - n^2) \right\} S_n(t) = 2t \sin^2 \frac{1}{2} \pi n + 2n \cos^2 \frac{1}{2} \pi n$$

und der Funktionalgleichung

$$S_n(t - z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_{n+m}(t)\, J_m(z).$$

b) Die **Polynome von LOMMEL** $R_{m,\nu}(z)$ sind für beliebige Werte von ν und für $m = 0, 1, 2, \ldots$ definiert durch

$$R_{m,\nu}(z) = (\nu)_m \left(\frac{1}{2} z\right)^{-m} {}_2F_3\left(\frac{1-m}{2}, \frac{-m}{2}; \ \nu, -m, 1-\nu-m; \ -z^2\right);$$

sie sind Polynome in z^{-1} und verbinden je drei BESSELsche Funktionen, deren Indizes sich um m und $m - 1$ von einem von ihnen unter-

$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(y)\,dy$	$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} F(x)\,dx$
$\left.\begin{array}{ll} 0 & \text{für } \lvert x\rvert < a \\ -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} & \text{,, } \lvert x\rvert > a \end{array}\right\}$	$\pi N_0(a\lvert y\rvert)$
$\left.\begin{array}{ll} \frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{für } \lvert x\rvert < a \\ \frac{\ln\left[\frac{x}{a}-\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right]}{\sqrt{x^2-a^2}} & \text{,, } \lvert x\rvert > a \end{array}\right\}$	$\operatorname{sgn} y\, N_0(a\lvert y\rvert)\, i\,\frac{\pi^2}{2}$
$\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$ $(\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2})$	$\left(\frac{\lvert y\rvert}{2a}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}K_{\nu}(a\lvert y\rvert)$ $(\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2})$
$\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\pi i \operatorname{sgn} y\, K_0(a\lvert y\rvert)$
$e^{ia^3x^3}$	$\left\{\begin{array}{ll} \frac{2}{3a}\sqrt{\frac{y}{a}}\,K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2y}{3a}\sqrt{\frac{y}{3a}}\right) & \text{für } y > 0 \\ \frac{2\pi}{3a}\sqrt{\frac{\lvert y\rvert}{3a}}\left[J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\lvert y\rvert}{3a}\sqrt{\frac{\lvert y\rvert}{3a}}\right)+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\lvert y\rvert}{3a}\sqrt{\frac{\lvert y\rvert}{3a}}\right)\right] & \text{für } y < 0 \end{array}\right.$
$\frac{\cos\left(b\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\left\{\begin{array}{ll} 2K_0\left(a\sqrt{y^2-b^2}\right) & \text{für } \lvert y\rvert > b \\ -\pi N_0\left(a\sqrt{b^2-y^2}\right) & \text{,, } \lvert y\rvert < b \end{array}\right.$
$\frac{\sin\left(b\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{für } \lvert y\rvert > b \\ \pi J_0\left(a\sqrt{b^2-y^2}\right) & \text{,, } \lvert y\rvert < b \end{array}\right.$
$\frac{e^{-b\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$2K_0\left(a\sqrt{b^2+y^2}\right)$
$\frac{e^{ib\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\pi i H_0^1\left(a\sqrt{b^2-y^2}\right)$
$\left.\begin{array}{ll} \frac{\cos\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{für } \lvert x\rvert < a \\ 0 & \text{,, } \lvert x\rvert > a \end{array}\right\}$	$\pi J_0\left(a\sqrt{b^2+y^2}\right)$
$\left.\begin{array}{ll} -\frac{\sin\left(b\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\sqrt{x^2-a^2}} & \text{für } \lvert x\rvert > a \\ +\frac{e^{-b\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{,, } \lvert x\rvert < a \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{ll} \pi J_0\left(a\sqrt{y^2-b^2}\right) & \text{für } \lvert y\rvert > b \\ 0 & \text{,, } \lvert y\rvert < b \end{array}\right.$

$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(y)\,dy$	$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} F(x)\,dx$
$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sgn} x\,\frac{\cos\left(b\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\sqrt{x^2-a^2}}; & \lvert x\rvert > a \\ 0; & \lvert x\rvert < a \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{ll} \pi i \operatorname{sgn} y\, J_0\left(a\sqrt{y^2-b^2}\right) & \text{für } \lvert y\rvert > b \\ 0 & \text{,, } \lvert y\rvert < b \end{array}\right.$
$\left.\begin{array}{ll} \frac{\mathfrak{Cos}\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{für } \lvert x\rvert < a \\ 0 & \text{,, } \lvert x\rvert > a \end{array}\right\}$	$\pi J_0\left(a\sqrt{y^2-b^2}\right)$
$\frac{\sin\left(b\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}\times$ $\times\left[\operatorname{Ci}\left(b\sqrt{a^2+x^2}+bx\right)+\operatorname{Ci}\left(b\sqrt{a^2+x^2}-bx\right)\right]-$ $-\frac{\cos\left(b\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}\times$ $\times\left[\operatorname{Si}\left(b\sqrt{a^2+x^2}+bx\right)+\operatorname{Si}\left(b\sqrt{a^2+b^2}-bx\right)\right]$	$\left\{\begin{array}{ll} \pi^2 N_0\left(a\sqrt{b^2-y^2}\right) & \text{für } \lvert y\rvert < b \\ 0 & \text{,, } \lvert y\rvert > b \end{array}\right.$
$\frac{\cos\left(b\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}\times$ $\times\left[\pi-\operatorname{Si}\left(b\sqrt{a^2+x^2}+bx\right)-\operatorname{Si}\left(b\sqrt{a^2+x^2}-bx\right)\right]+$ $+\frac{\sin\left(b\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}\times$ $\times\left[\operatorname{Ci}\left(b\sqrt{a^2+x^2}+bx\right)+\operatorname{Ci}\left(b\sqrt{a^2+x^2}-bx\right)\right]$	$\left\{\begin{array}{ll} 2\pi K_0\left(a\sqrt{y^2-b^2}\right) & \text{für } \lvert y\rvert > b \\ 0 & \text{,, } \lvert y\rvert < b \end{array}\right.$
$\left.\begin{array}{ll} P_n(x) & \text{für } \lvert x\rvert < 1 \\ 0 & \text{,, } \lvert x\rvert > 1 \end{array}\right\}$	$2i^n\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(y)$
$\left.\begin{array}{ll} \frac{J_\nu\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{für } \lvert x\rvert < a \\ 0 & \text{,, } \lvert x\rvert > a \end{array}\right\}$	$\pi J_{\nu/2}\left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{b^2+y^2}-y\right)\right]\times$ $\times J_{\nu/2}\left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{b^2+y^2}+y\right)\right]$
$\frac{J_\nu\left(b\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}^{\,\nu}}$	$\left\{\begin{array}{ll} \sqrt{2\pi}\,a\,a^{-\nu}b^{-\nu}\sqrt{b^2-y^2}^{\,\nu-\frac{1}{2}}\,J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(a\sqrt{b^2-y^2}\right) & \text{für } \lvert y\rvert < b \\ 0 & \text{,, } \lvert y\rvert > b \end{array}\right.$
$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{a^2-x^2}^{\,\nu}\,J_\nu\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right) & \text{für } \lvert x\rvert < a \\ 0 & \text{,, } \lvert x\rvert > a \end{array}\right\}$	$\sqrt{2\pi}\,a\,a^{\nu}b^{\nu}\,\frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(a\sqrt{b^2+y^2}\right)}{\sqrt{b^2+y^2}^{\,\nu+\frac{1}{2}}}$

Zusammenstellung der benutzten Abkürzungen.

Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Größe. Dann ist

$\operatorname{Re} z$ = Realteil von $z = x$.

$\operatorname{Im} z$ = Imaginärteil von $z = y$.

$\bar{z}$ = $x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Größe.

$|z|$ = Absoluter Betrag von $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

$\arg z$ = Argument oder Arcus von z; $\sin(\arg z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos(\arg z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\ln z$ = Hauptwert des natürlichen Logarithmus von z; $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ mit $-\pi < \arg z < \pi$; wenn z reell und negativ ist, wird stets besonders angegeben, ob $\arg z = \pi$ oder ob $\arg z = -\pi$ zu setzen ist.

z^α = $e^{\alpha \ln z}$

$\operatorname{sgn} x$ = Signum oder Vorzeichen der (reellen) Größe x; $\operatorname{sgn} x = +1$ für $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ für $x < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

$[x]$ = größte ganze Zahl, welche kleiner oder gleich der reellen Größe x ist.

$f(x_0 + 0)$ = $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon)$. Grenzwert von $f(x)$ bei Annäherung an den Punkt x_0 von Werten $x > x_0$ her.

$f(x_0 - 0)$ = $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_0 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

$f(x_0 \pm 0\, i)$ = $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_0 \pm \varepsilon i)$, $\varepsilon > 0$.

n = $0, 1, 2, \ldots$, bedeutet stets eine nicht negative ganze Zahl, wenn nichts anderes gesagt ist.

$n!$ = $1 \cdot 2 \ldots n$.

$0!$ = 1.

$(\alpha)_n$ = $\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$(\alpha)_0$ = 1.

$\binom{\alpha}{n}$ = $(-1)^n \dfrac{(-\alpha)_n}{n!} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}$.

ε_n = NEUMANNsche Zahlen; $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ = Hypergeometrische Reihe

$$= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\, 1!} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\, 2!} z^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta_n)}{(\gamma)_n\, n!} z^n.$$

${}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \gamma_1, \ldots, \gamma_q; z)$ = Verallgemeinerte hypergeometrische Reihe (nur für $p \leqq q + 1$ konvergent)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n \ldots (\gamma_q)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

${}_1F_1(\alpha; \gamma, z)$ = $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}$.

${}_0F_1(; \gamma; z)$ = $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\gamma)_n\, n!}$.

(ν, n) = $\dfrac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\ldots[4\nu^2 - (2n-1)^2]}{2^{2n}\, n!}$ für $n = 1, 2, 3 \ldots$.

$(\nu, 0)$ = 1.

∇_ν = s. Kap. III, § 9.

$O[f(z)]$ = Größenordnung von $f(z)$. Wenn z sich einem Grenzwert z_0 nähert (meist ist z_0 gleich ∞; der Grenzwert z_0 ergibt sich stets aus dem Zusammenhang) schreibt man $g(z) = O[f(z)]$, wenn es eine reelle nicht negative Konstante M gibt, so daß in einer hinreichend kleinen Umgebung von $z = z_0$ beständig

$$|g(z)| \leqq M |f(z)|$$

ist.

$\gg$ = „Groß gegen“ } Ausdrücke, die gebraucht werden, um die Verwendungsmöglichkeit von Näherungsformeln anzudeuten.

$\ll$ = „Klein gegen“

$\sim$ = „Ungefähr gleich“ in Formeln ohne explizite Fehlerabschätzung, hauptsächlich benutzt bei Angabe des ersten Gliedes einer asymptotischen (semikonvergenten) Reihe.

$\approx$ = „Asymptotisch gleich“. Das Zeichen wird benutzt bei Angabe einer semikonvergenten Entwicklung für eine Funktion.

$\subset\!\!\!\cdot$, $\doteqdot$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^{-1}$ } = Zeichen für die LAPLACE-Transformation und ihre Umkehrung; s. Kap. VIII, § 2.

Verzeichnis der Funktionssymbole

in alphabetischer Reihenfolge.

Symbol	Name der Funktion	Kapitel und Abschnitt
$B(x, y)$	Betafunktion	I.
B_{2n}	BERNOULLIsche Zahlen	I.
$\mathrm{ber}_\nu z$, $\mathrm{ber}\, z$	Real- und Imaginärteil der BESSELschen Funktionen von $z e^{3\pi i/4}$ (bei reellem z)	III, § 1.
$\mathrm{bei}_\nu z$, $\mathrm{bei}\, z$		
C	EULERsche Konstante	I.
$C(x)$	FRESNELsches Kosinusintegral	VI, § 4.
$C_n^\nu(t)$	GEGENBAUERsche Funktionen (Polynome)	IV, Anhang
$ce_{2n}(x)$, $ce_{2n+1}(x)$	MATHIEUsche Funktionen erster Art	Anhang zu Kap. III
$ce_{2n}^{(2)}(x)$, $ce_{2n+1}^{(2)}(x)$	MATHIEUsche Funktionen zweiter Art	
$Ce_{2n}^{(1)}$, $Ce_{2n+1}^{(1)}$	zugeordnete MATHIEUsche Funktionen erster bzw. zweiter Art	
$Ce_{2n}^{(2)}$, $Ce_{2n+1}^{(2)}$		
$\mathrm{Ci}(x)$	Integralkosinus	VI, § 4.
$\mathrm{cd}\, u = \dfrac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}$	—	VII, § 3.
$\mathrm{cn}\, u$	Cosinus amplitudinis	
$\mathrm{cs}\, u = \dfrac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{sn}\, u}$	—	
$D_\nu(z)$	WEBER-HERMITEsche Funktionen, Funktionen des parabolischen Zylinders	VI, § 3.
$\mathrm{dc}\, u = \dfrac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}\, u}$	—	VII, § 3.
$\mathrm{dn}\, u$	Delta amplitudinis	
$\mathrm{ds}\, u = \dfrac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{sn}\, u}$	—	
e_1, e_2, e_3	—	VII, § 2.
$E(\alpha, \varphi)$	Elliptisches Normalintegral zweiter Gattung	VII, § 4.
$\mathsf{E}(k)$	Vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung	VII, § 4.
$\mathsf{E}'(k) = \mathsf{E}(k')$	—	VII, § 4.
$\mathsf{E}_\nu(z)$	WEBERsche Funktion	III, § 9.
$\mathrm{Ei}(x)$	Exponentialintegral	VI, § 4.
$\mathrm{Erfc}(x)$	Errorfunction	VI, § 4.
ε_n	NEUMANNsche Zahlen	III, § 1.
$F(\alpha, \varphi)$	Elliptisches Normalintegral erster Gattung	VII, § 4.
$F(a, b; c; z)$	Hypergeometrische Reihe	II, § 1, s. a. Verzeichn. d. Abkürzung.
${}_2F_1(a, b; c; z)$		
${}_pF_q$	verallgemeinerte hypergeometrische Reihe	
${}_1F_1(a; c; z)$	KUMMERsche Funktion	VI, § 1.
$\mathfrak{F}_n(\alpha, \gamma, x)$	JACOBIsche Polynome	V, § 3.

Symbol	Name der Funktion	Kapitel und Abschnitt
g_2, g_3	—	VII, § 2.
$\Gamma(z)$	Gammafunktion	I.
$\gamma = e^c$	—	I.
$\gamma(\nu, x)$	Unvollständige Gammafunktion	VI. § 4.
$\mathsf{H}_\nu(z)$	STRUVEsche Funktion	III, § 9.
$H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$	HANKELsche Funktion erster bzw. zweiter Art	III, § 1.
$He_n(x)$	HERMITEsche Polynome	V, § 2.
$he_n(x)$	HERMITEsche Funktionen 2. Art	V, § 2.
$her_\nu(z)$, $hei_\nu(z)$	—	III, § 1.
$her(z)$, $hei(z)$		
$I_\nu(z)$	modifizierte BESSELsche Funktionen	III, § 1.
$J_\nu(z)$	BESSELsche Funktionen	III, § 1.
$\mathsf{J}_\nu(z)$	ANGERsche Funktionen	III, § 9.
k	Modul der (JACOBIschen) elliptischen Funktionen und Integrale	VII, § 3.
$k' = \sqrt{1-k^2}$	komplementärer Modul	VII, § 3.
$\mathsf{K}(k)$	Vollständiges elliptisches Normalintegral erster Gattung	VII, § 3.
$\mathsf{K}(k') = \mathsf{K}(k)$	—	
$K_\nu(z)$	modifizierte HANKELsche Funktionen	III, § 1.
$kei_\nu(z)$, $kei(z)$	—	III, § 1.
$ker_\nu(z)$, $ker(z)$		
$L_n(x)$	LAGUERREsche Polynome	V, § 4.
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Verallgemeinerte LAGUERREsche Polynome	V, § 4.
$L_\nu^{(\alpha)}(x)$	LAGUERREsche Funktionen	VI, § 4.
$\mathfrak{L}[f(t)]$	LAPLACE-Transformierte von $f(t)$	VIII, § 2.
$\mathrm{li}(x)$	Integrallogarithmus	VI, § 4.
$N_\nu(z)$	NEUMANNsche Funktionen	III, § 1.
$M_{\varkappa,\mu}(z)$	konfluente hypergeometrische Funktionen	VI, § 2.
$N_{\varkappa,\mu}(z)$		
$\mathrm{nc}\, u = \dfrac{1}{\mathrm{cn}\, u}$	—	VII, § 3.
$\mathrm{nd}\, u = \dfrac{1}{\mathrm{dn}\, u}$		
$\mathrm{ns}\, u = \dfrac{1}{\mathrm{sn}\, u}$		
$O[f(z)]$	—	siehe Verz. d. Abkürzungen S. 163
$O_n(t)$	NEUMANNsche Polynome	III, § 8.
$\wp(u)$	Pe-Funktion von WEIERSTRASS	VII, § 2.
$P_n(z)$	LEGENDREsche Polynome	IV, § 2.
$P_n^m(x)$	zugeordnete LEGENDREsche Polynome	IV, § 3.
$\mathfrak{P}_n^m(x)$		
$\mathfrak{P}_\nu(z)$, $P_\nu(x)$	LEGENDREsche Funktionen erster Art	IV, § 4.

Symbol	Name der Funktion	Kapitel und Abschnitt
$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$, $P_\nu^\mu(z)$	zugeordnete Kugelfunktionen erster Art	IV, § 5.
$\Pi(z)$	Fakultät von z	I.
$P\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{matrix}\right\}$	RIEMANNsche Differentialgleichung	II, § 2
$\Phi(x)$	Fehlerintegral	VI, § 4.
$\psi(z)$	EULERsche Psi-Funktion	I.
$\psi_n(z)$	—	III, § 1.
$\mathfrak{Q}_\nu(z)$, $Q_\nu(x)$	LEGENDREsche Funktionen (Kugelfunktionen) zweiter Art	IV, § 4.
$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(x)$	zugeordnete Kugelfunktion zweiter Art	IV, § 5.
$R_{m,\nu}(z)$	LOMMELsche Polynome	III, § 8.
$S(t)$	FRESNELsches Sinus-Integral	VI, § 4.
$S_n(t)$	SCHLÄFLIsche Polynome	III, § 8.
$s_{\mu;\nu}(z)$ $S_{\mu;\nu}(z)$	LOMMELsche Funktionen	III, § 10.
$se_{2n}(x)$; $se_{2n+1}(x)$	MATHIEUsche Funktionen erster Art	Anhang zu Kap. III.
$se_{2n}^{(2)}(x)$; $se_{2n+1}^{(2)}(x)$	MATHIEUsche Funktionen zweiter Art	Anhang zu Kap. III.
$Se_{2n}^{(1)}(x)$; $Se_{2n+1}^{(1)}(x)$	zugeordnete MATHIEUsche Funktionen erster bzw. zweiter Art	Anhang zu Kap. III.
$Se_{2n}^{(2)}(x)$; $Se_{2n+1}^{(2)}(x)$	zugeordnete MATHIEUsche Funktionen erster bzw. zweiter Art	Anhang zu Kap. III.
$\mathrm{Si}(x)$	Integralsinus	VI, § 4.
$\mathrm{sn}\, u$	Sinus amplitudinis	VII, § 3.
$T_n(x)$	TSCHEBYSCHEFFsche Polynome	V, § 1.
$T_\alpha^{(n)}(x)$	SONINEsche Polynome	V, § 4.
$\vartheta_1(v,t)$, $\vartheta_2(v,t)$	Elliptische Thetafunktionen	VII, § 1.
$\vartheta_3(v,t)$, $\vartheta_0(v,t)$	Elliptische Thetafunktionen	VII, § 1.
$U_n(x)$	TSCHEBYSCHEFFsche Polynome zweiter Art	V, § 1.
$W_{n-1}(z)$, $W_{n-1}(x)$	—	IV, § 4.
$W_{\varkappa,\mu}(z)$	WHITTAKERsche Funktionen	VI, § 1.
$Y_\nu(z)$	NEUMANNsche Funktionen	III, § 1.
$\mathfrak{Z}_\nu(z)$, $Z_\nu(x)$	Zylinderfunktionen	VII, § 1.
$\mathrm{zn}\, u$	JACOBIsche Zetafunktion	VII, § 4.

Literaturverzeichnis.

Im folgenden sind zunächst [unter a)] eine Reihe von Lehrbüchern und Monographien zusammengestellt, welche weiterhin [unter b)] nur noch mit dem Namen des Verfassers und Angabe der Seitenzahl zitiert werden. Soweit die betreffenden Werke Kapitelüberschriften besitzen, welche mit den Überschriften des vorliegenden Buches übereinstimmen, sind besondere Verweise auf Seitenzahlen meist unterblieben. Die Angaben unter b) enthalten zunächst zu jedem einzelnen Kapitel Literaturverweise, welche sich auf das Kapitel als Ganzes beziehen; sodann wird zu den einzelnen Abschnitten ein Nachweis der benutzten Literatur, insbesondere der Originalarbeiten, hinzugefügt, soweit dies notwendig erscheint.

a) Lehrbücher und Monographien.

APPELL, P., J. KAMPÉ DE FÉRIET: Fonctions hypergéometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. Paris 1926. 4⁰.

BATEMAN, H.: Partial differential equations of mathematical Physics. Cambridge 1932.

BIEBERBACH, L.: Theorie der Differentialgleichungen. Berlin 1926.

COURANT, R., HILBERT, D.: Methoden der mathematischen Physik. Bd. 1 2. Auflage. Berlin 1931.

DOETSCH, G.: Theorie und Anwendung der Laplacetransformation. Berlin 1937.

DROSTE, H. W.: Theorie und Anwendung der Laplacetransformation. Berlin 1939.

ENNEPER, A.: Elliptische Funktionen, 2. Aufl. Halle 1890.

FORSYTHE, A. R., JACOBSTHAL, W.: Differentialgleichungen. Braunschweig 1912.

GRAY, A., MATHEWS, G. B.: A Treatise on Bessel Functions. London 1895.

HAAN, Bierens de: Nouvelles Tables d'intégrales definies. Leide 1867, 4⁰.

HAMEL, G.: Integralgleichungen. Berlin 1937.

HOBSON, E. W.: The Theory of spherical and ellipsoidal Harmonics. Cambridge 1931.

HUMBERT, P., MAC LACHLAN, N. W.: Formulaire pour le calcul d'Heaviside. Paris 1939. (Mémorial des sciences mathematiques. Nr. 100.)

HURWITZ, A., COURANT, R.: Funktionentheorie, 2. Auflage. Berlin 1925.

JAHNKE, F., EMDE, F.: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 2. Aufl. Leipzig 1933; 3. Auflage 1938.

KLEIN, F.: Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Berlin 1933.

KRAUSE, M.: Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1912.

MAC LACHLAN, N. W.: Complex Variable and operational Calculus with technical applications. Cambridge 1939.

MADELUNG, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. 3. Aufl. Berlin 1936.

MILNE-THOMSON, L. M.: Die elliptischen Funktionen von JACOBI. Berlin 1931.

NIELSEN, N.: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

POCKELS, F.: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + K^2 u = 0$. Leipzig 1891.

POLYA, G., SZEGÖ, G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis Bd. 2. Berlin 1925.

MAC ROBERT, T. M.: Spherical Harmonics. London 1928.

STRUTT, M. I. O.: LAMÉsche, MATHIEUsche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 1 Nr. 3). Berlin 1932.